Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 3:

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

MỘT SỐ BÀI TẬP CƠ BẢN

Phương trình lượng giác cơ bản:

$$\begin{cases} \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi \\ \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \\ \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \end{cases}$$

Bài 1. Giải phương trình

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi\sin 2x\right) \Leftrightarrow 1 + \cos\left(\pi\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi\sin 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi\cos^2 x\right) = \cos\left(\pi\sin 2x\right) \Leftrightarrow \pi\cos^2 x = \pm\pi\sin 2x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \pm\sin 2x + 2k \Leftrightarrow \cos 2x \pm 2\sin 2x = 4k - 1 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $(4k-1)^2 \le 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{4} \le k \le \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow k = 0 \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình (*) trở thành

$\cos 2x \pm 2\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x \pm 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(\cos x \pm 2\sin x\right) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \tan x = \pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\alpha + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}, \tan\alpha = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pm\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \tan\alpha = \dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài 2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x - 16k \geq 0\\ 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 2k)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x - 16k \geq 0\\ 9x = 24k - 40 - \dfrac{25}{3k + 5}\end{cases}$$

Vậy với $x, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 25 \vdots 3k + 5 \Rightarrow \begin{cases}k = -2\\ x = -7\end{cases} \vee \begin{cases}k = -10\\ x = -31\end{cases}$

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{x = -7, x = -31\}$.

Bài 3. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$$cos\left(\pi\left(x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi x^2\right)$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\cos\left(\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right)=\sin\left(\pi x^2\right)\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\left(x^2+2x\right)\right)=\sin\left(\pi x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\pi\left(x^2+2x\right)\right)=\sin\left(\pi x^2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi\left(x^2+2x\right)=\pi x^2+k2\pi\\ \pi\left(x^2+2x\right)=\pi-\pi x^2+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4k+3}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x>0\Rightarrow\begin{cases}k\ge 0\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow k=0\Rightarrow x_{\min}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Bài 4. Tìm nghiệm x thuộc đoạn $[0;14]$ thỏa mãn phương trình

$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$4\cos^3 x-3\cos x-4\left(\cos 2x+1\right)+3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$0\le x\le 14\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14\Rightarrow k\in\left\{0,1,2,3\right\}$$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right\}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[-1,10]$ của phương trình

$$\sin x\cos\frac{\pi}{5}+\cos x\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\cos\left(\pi x^2\right)=\cos\left(\pi\left(x+1\right)^2\right)$$

Bài 3. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x-\sqrt{9x^2+80x-40}\right)\right)=1$$

Bài 4. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^8+3x^4-2}\sin\left(\pi\left(16x^2+2x\right)\right)=0$$

Bài 5. Tìm các nghiệm thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$ của phương trình

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3$$

Bài 6. Tìm nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ thỏa mãn phương trình

$$2\sin 2x-3\cos 2x+2\left(3\sin x-\cos x\right)=7$$

ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX, COSX

Cần nhớ đến các biến đổi sau, khi xuất hiện các biểu thức này khi giải toán sẽ áp dụng cách biến đổi tương tự.

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\cos x\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x\pm\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x\mp\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3}\sin x\pm\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\pm\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x\pm\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x\mp\frac{\pi}{3}\right)$$

BÀI TẬP MẪU

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 1. Giải phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) = 2\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2. Giải phương trình

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{6} = 4x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = -4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\left(\sin 2x + \sin x\right) + \cos 2x - \cos x = 2$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\left(\sin 2x+\sin x\right)+\cos 2x-\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\ ,k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

Bài 4. Giải phương trình

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=-5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=5\sin\left(5x+\frac{7\pi}{6}\right)$$

Đặt $\sin\alpha=\frac{4}{5};\cos\alpha=\frac{3}{5}$, khi đó phương trình tương đương với

$$5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=5\sin\left(5x+\frac{7\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=\frac{9\pi}{24}+\frac{\alpha}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{36}-\frac{\alpha}{6}+\frac{k\pi}{3}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Giải phương trình: $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 1\\ \sin x\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (*)

Khi đó phương trình tương đương với:

$\cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(1+2\sin x-\sin x-2\sin^2 x\right)\Leftrightarrow \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(\cos 2x+\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos s\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{6}=x+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ 2x-\dfrac{\pi}{6}=-x-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

So sánh với điều kiện (*) suy ra nghiệm của phương trình là: $x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

Bài 6. Giải phương trình: $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+4=0$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\left(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+2=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2=0\Leftrightarrow -\cos\left(2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\pi\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2=0$

$-\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2=0\Leftrightarrow -2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2=0$

$\Leftrightarrow\left(\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1\right)\left(-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-3\right)=0\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 7. Giải phương trình: $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x=2$

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 3x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=1$$

Do $\begin{cases}-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\\ -1\le\sin 3x\le 1\end{cases}$ nên phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Bài 8. Giải phương trình:

$$4\left(\sin^4 x+cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=3+\left(1+\tan 2x\tan x\right)\sin 4x$$

Lời giải:

Điều kiện: $\cos x\cos 2x\ne 0$ (*).

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=3+\left(\frac{\sin x\sin 2x+\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}\right)\sin 4x$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=2\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+\frac{\pi}{6}=2x+k2\pi \\ 4x+\frac{\pi}{6}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{36}+k\frac{\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \text{ thỏa mãn (*)}.$$

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{3}\left(\sin 2x-\cos x\right)+\sin x-\cos 2x=2$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+\sin x-\sqrt{3}\cos x=2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi;-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Bài 10. Giải phương trình $\dfrac{\sin x\sin 2x+2\sin x\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x+\sin x+\cos x}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)}=\sqrt{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\cos 2x\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra nghiệm $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm $x\in\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình

$$\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)\cos x=3+\cos 2x.$$

Bài 4. Giải phương trình

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right).$$

Bài 5. Giải phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\cos x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1=\sqrt{3}\left(1+2\cos x\right).$$

Bài 6. Giải phương trình: $16\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-4\sqrt{3}\cos 2x+5=0$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos x\tan^2 x+\sin x=4\tan x-\sin x\tan^2 x-\sqrt{3}\cos x$.

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$.

Bài 9. Giải phương trình: $\dfrac{(3\sin x-1)\left(2\sqrt{3}\cos x-1\right)}{\sin x\left(2\sqrt{3}\cos x+1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 11. Giải phương trình: $\sqrt{3}\left(\sin 2x-\cos x\right)+\sin x-\cos 2x=2$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SINX, COSX

Phương trình có dạng

$a\left(\sin x+\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$

$a\left(\sin x-\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$

Đặt $\left[\begin{array}{l} t=\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}. \\ t=\sin x-\cos x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}. \end{array}\right.$

Đưa về giải phương trình với ẩn là t.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x.$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$1+\left(\sin x+\cos x\right)^3-3\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=3\sin x\cos x.$

Đặt $t=\sin x+\cos x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$

Khi đó phương trình trở thành

$1+t^3-3\left(\frac{t^2-1}{2}\right)t=3\left(\frac{t^2-1}{2}\right)\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-5=0\Leftrightarrow\left(t+1\right)\left(t^2+2t-5\right)=0$

$\Leftrightarrow t=-1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Bài 2. Giải phương trình:

$2\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)-\sin 2x=1.$

Lời giải:

đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin 2x=t^2-1.$

Khi đó phương trình trở thành:

$2\sqrt{2}t-\left(t^2-1\right)=1\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t=0\Leftrightarrow t\left(t-2\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Bài 3. Giải phương trình:

$\frac{\left(1-\sqrt{2}\sin x\cos x\right)\left(1+\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)-\frac{1}{2}}{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}=0.$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $\sin x+\cos x+\sqrt{2}\ne 0$ (*).

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t^2-1\right)\right)\left(1+\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{2}t^2\right)\left(2+t\right)=2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}t^3-2\sqrt{2}t^2+\left(2+\sqrt{2}\right)t+2+2\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}t^2-\left(2\sqrt{2}+2\right)t-\sqrt{2}-2\right)=0\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-1\right)\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\t=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}\quad \text{(thỏa mãn (*)).}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k2\pi,\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình

$$\sin x-\cos x+7\sin 2x=1.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sin x-\cos x\right)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$$

Bài 3. Giải phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Bài 4. Giải phương trình

$$\sin 3x-\cos 3x+2\left(\sin x+\cos x\right)=1.$$

Bài 5. Giải phương trình

$$2+\left(2+\sin 2x\right)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\tan x+\cot x\right)=0.$$

Bài 6. Giải phương trình:

$$\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}.$$

Bài 7. Giải phương trình:

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x.$$

Bài 8. Giải phương trình:

$$\frac{\sin x\cos^2 x+\cos x\sin^2 x+\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x-\sin 2x\right)-\sqrt{2}}{\sin x+\cos x-\sin x\cos x}=0.$$

Bài 9. Giải phương trình:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sin x-\cos x\right)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$$

Bài 10. Giải phương trình:

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

Bài 11. Giải phương trình: $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1$.

Bài 12.

Giải phương trình: $5\left(1-\sin 2x\right)-16\left(\sin x-\cos x\right)+3=0$.

Bài 13.

Giải phương trình: $\left(\sin x+\cos x-1\right)\left(2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)+1\right)=2\sin 2x$.

Bài 14.

Giải phương trình: $2\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)-\left(\sin x+\cos x\right)+\sin 2x=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 15.

Giải phương trình: $2\left(\sin^3 x + cos^3 x\right) + \sin 2x\left(\sin x + \cos x\right) = 2\sqrt{2}$.

Bài 16.

Giải phương trình: $\left(\sin x + \cos x - 1\right)\left(2\sin 2x + 1\right) = \left(\sin x + \cos x\right)\left(2\sin 2x - 1\right)$.

PHƯƠNG TRÌNH KẾT HỢP TANX, COTX, SINX, COSX

Bài 1. Giải phương trình: $2\left(\tan x - \sin x\right) + 3\left(\cot x - \cos x\right) + 5 = 0$.

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1 - \sin x\right) + 3\left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1 - \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \cos x - \sin x\cos x\right)\left(\frac{2}{\cos x} + \frac{3}{\sin x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -\dfrac{3}{2} \\ \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình: $3\left(\cot x - \cos x\right) - 5\left(\tan x - \sin x\right) = 2$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$3\left(\frac{\cos x}{\sin x} + 1 - \cos x\right) - 5\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1 - \sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\left(\cos x + \sin x - \sin x\cos x\right)}{\sin x} - \frac{5\left(\cos x + \sin x - \sin x\cos x\right)}{cosx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sin x} - \frac{5}{cosx}\right)\left(\cos x + \sin x - \sin x\cos x\right) = 0.$$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right) = \tan x + \cot x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=\sin^2 x+cos^2 x=1$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t^2-1\right)t=1\Leftrightarrow \sqrt{2}t^3-\sqrt{2}t-2=0\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}t^2+2t+\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 4. Giải phương trình: $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0$

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x+\sin x\cos x\right)=0$$

- ❖ Xét $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.
- ❖ Xét $\sin x-\cos x+\sin x\cos x=0$ (*), đặt

$t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos x\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$t+\frac{1-t^2}{2}=0\Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow t=1-\sqrt{2}\Leftrightarrow -\sqrt{2}cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=cos\alpha\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\pi.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$\left\{x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,-\frac{\pi}{4}\pm\alpha+k2\pi,k\in\mathbb{Z},\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Bài 5. Giải phương trình: $3(\tan x+\cot x)=2(2+\sin 2x)$.

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$3\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=2(2+\sin 2x)\Leftrightarrow\frac{3(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x\cos x}=2(2+\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6}{\sin 2x}=2(2+\sin 2x)\Leftrightarrow\sin^2 2x+2\sin 2x-3=0\Leftrightarrow(\sin 2x-1)(\sin 2x+3)=0$$

. thỏa mãn điều kiện.

Bài 6. Giải phương trình: $2\tan x+\cot x=\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sin 2x}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$$(\tan x+\cot x)+\tan x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}\Leftrightarrow\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)+\tan x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}+\tan x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}\Leftrightarrow\tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 7. Giải phương trình:

$$3\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)-12=2\sqrt{3}(\tan x-\cot x).$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x\neq 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó phương trình tương đương với:

$$3\left(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\right)-12=2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x-2\right)-2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan x-\cot x\right)^2-2\sqrt{3}\left(\tan x-\cot x\right)=0 \Leftrightarrow \left(\tan x-\cot x\right)\left(3\left(\tan x-\cot x\right)-2\sqrt{3}\right)=0$$

❖ Xét $\tan x-\cot x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

❖ Xét $\tan x-\cot x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan x-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $4\sin^2 x+3\tan^2 x=1$.

Bài 2. Giải phương trình: $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin x$.

Bài 3. Giải phương trình: $1+3\sin 2x=2\tan x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\tan^2 x\left(1-\sin^3 x\right)+\cos^3 x-1=0$.

Bài 5. Giải phương trình: $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$.

Bài 6. Giải phương trình: $\sin 2x-2\cos^2 x+4\left(\sin x-\cos x+\tan x-1\right)=0$.

Bài 7. Giải phương trình: $\cot^4 x=\cos^3 2x+1$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sin^2 x\tan x+\cos^2 x\cot x-\sin 2x=1+\cot x+\tan x$.

Bài 9. Giải phương trình: $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=1+\sin 2x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 10. Giải phương trình: $\frac{3(\sin x+\tan x)}{\tan x-\sin x}-2\cos x=2$.

Bài 11. Giải phương trình: $(\tan x-\cot x+2\tan 2x)(1+\cos 3x)=4\sin 3x$.

Bài 12. Giải phương trình: $\tan^2 x=\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$.

Bài 13. Giải phương trình: $\tan^2 x=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.

Bài 14. Giải phương trình: $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=1+\sin 2x$.

Bài 15. Giải phương trình: $1+\cot 2x=\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

Bài 16. Giải phương trình: $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x$.

Bài 17. Giải phương trình: $\tan x=\cot x+2\cot^3 2x$.

Bài 18. Giải phương trình: $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$.

Bài 19. Giải phương trình: $\cot x=\tan x+2\tan 2x$.

Bài 20. Giải phương trình: $6\tan x+5\cot 3x=\tan 2x$.

Bài 21. Giải phương trình: $2(\cot 2x-\cot 3x)=\tan 2x+\cot 3x$.

Bài 22. Giải phương trình: $3\tan 3x+\cot 2x=2\tan x+\frac{2}{\sin 4x}$.

Bài 23. Giải phương trình: $2\tan x+\cot 2x=2\sin 2x+\frac{1}{\sin 2x}$.

Bài 24. Giải phương trình: $\cot x-1=\sqrt{2}(\tan x+\cot x)(\cos x-\sin x)$.

Bài 25. Giải phương trình: $2+\tan x=\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Bài 26. Giải phương trình: $3\tan^2 x+\frac{3(\tan x+1)}{\cos x}-4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỈ CHỨA MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các công thức biến đổi

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x};\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Thường gặp các phương trình dạng:

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d = 0$

Hoặc $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x + \left(m\sin x + n\cos x\right) = 0$

Phương pháp giải:

(i). Xét trường hợp $\cos x = 0$ có phải là nghiệm của phương trình hay không.

(ii). Xét trường hợp $\cos x \neq 0$, khi đó chia cả hai vế của phương trình thứ nhất và thứ hai lần lượt cho $\cos^2 x$ và $\cos^3 x$. Ta được các phương trình thuần nhất bậc hai, bậc ba với ẩn là $\tan x$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình

$$\frac{2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0.$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2\left(\sin^6 x+cos^6 x\right)-\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$

$\Leftrightarrow\left(\sin 2x-1\right)\left(3\sin 2x-4\right)=0\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Đối chiếu với điều kiện (*), suy ra k lẻ suy ra $x=\frac{\pi}{4}+\left(2k+1\right)\pi=\frac{5\pi}{4}+k2\pi$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Bài 2. Giải phương trình

$\sin^2 2x\cos 6x+\sin^2 3x=\frac{1}{2}\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{9x}{2}.$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$\left(1-cos4x\right)cos6x+1-cos6x=\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{9x}{2}\Leftrightarrow 1-cos4x\cos s6x=\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{9x}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\left(cos10x+cos2x\right)=\frac{1}{2}\left(cosx-cos10x\right)\Leftrightarrow cos2x+\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-3=0\Leftrightarrow\left(\cos x-1\right)\left(2\cos x+3\right)=0\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Bài 3. Giải phương trình

$5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x.$

Lời giải:

Điều kiện $\cos x\neq 0.$

Khi đó phương trình tương đương với

$5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\Leftrightarrow 5\sin x-2=\frac{3\sin^2 x}{1+\sin x}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Bài 4. Giải phương trình:

$4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x\cos x = 0$.

Lời giải:

Nhận thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x \neq 0$, khi đó chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được phương trình:

$4\tan^3 x + 3 - 3\tan x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Bài 5. Giải phương trình:

$\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$2\sin^2 x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x - 6\cos^3 x = 0$

Nhận thấy $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x \neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được phương trình

$2\tan^2 x + 3\tan x(1 + \tan^2 x) - 4\tan^3 x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x - 3\tan x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 2)(\tan^2 x - 3) = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 2 = \tan\alpha \\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \alpha + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 6. Giải phương trình:

$1 + 3\sin 2x = 2\tan x$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với:

$$1 + 3.\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 2\tan x \Leftrightarrow 2\tan^3 x - \tan^2 x - 4\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)\left(2\tan^2 x - 3\tan x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình: $\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0$.

Bài 2. Giải phương trình: $\sin^3\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 3\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos x + \sin 2x$.

Bài 3. Giải phương trình : $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sin x\cos 2x = 6\cos x(1 + 2\cos 2x)$.

Bài 5. Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\cos^3 x + 2\sin^3 x\right)}{2\sin x + 3\cos x} = \sin 2x$.

Bài 6. Giải phương trình: $\sin x + \cos x - 4\sin^2 x = 0$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{2}\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Giải phương trình: $\dfrac{8\cos^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos 3x}{\cos x-\dfrac{1}{2}}=0$.

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin x}{\sin x+\cos x}=0$.

Bài 11. Giải phương trình: $6\sin x-2\cos^3 x=\dfrac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$.

Bài 12. Giải phương trình: $\dfrac{\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-3x\right)}{\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

BIẾN ĐỔI VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Các công thức sử dụng :

i. $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

ii. $\sin a-\sin b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$.

iii. $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

iv. $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

Lưu ý :Các thừa số chung

$+1+\sin 2x;\cos 2x;1+\tan x;1+\cot x$ có thừa số chung là $\sin x+\cos x$.

$+1-\sin 2x;\cos 2x;1-\tan x;1-\cot x$ có thừa số chung là $\sin x-\cos x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$+\sin^2 x, \tan^2 x$ có thừa số chung là $(1-\cos x)(1+\cos x)$.

$+\cos^2 x, \cot^2 x$ có thừa số chung là $(1-\sin x)(1+\sin x)$.

Lưu ý với Bài tập mẫu số 5. Các bài toán thường cho dưới dạng này.

Thông thường loại toán này có dạng :

$(a+b\sin x).f(\cos x)+f(\sin x)=0$

Ta phân tích được $f(\sin x)=(a+b\sin x)g(\sin x)$

Khi đó phương trình trở thành :

$$(a+b\sin x)\big(f(\cos x)+g(\sin x)\big)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b\sin x=0 \\ f(\cos x)+g(\sin x)=0 \end{array}\right.$$

<u>Ví dụ :</u>Giải phương trình :

$$9\sin x+6\cos x(1-\sin x)-2\sin^2 x-7=0 \Leftrightarrow 6\cos x(1-\sin x)+\left(-2\sin^2 x+9\sin x-7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos x(1-\sin x)+(1-\sin x)(-7+2\sin x)=0 \Leftrightarrow (1-\sin x)(6\cos x+2\sin x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1 \\ 6\cos x+2\sin x-7=0 \end{array}\right.$$

BÀI TẬP MẪU

Lưu ý : ***Nhóm các số hạng với nhau dùng công thức cộng, trừ lượng giác***

Bài 1.

Giải phương trình: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với:

$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=\cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\left\{\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi;\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 2.

Giải phương trình: $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với: $(\cos 3x+1)+(\cos x+\cos 2x)=0 \Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{3x}{2}+2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\dfrac{3x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 3.

Giải phương trình: $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$(\cos x+\cos 4x)+(\cos 2x+\cos 3x)=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\\ \cos x=0\\ \cos\dfrac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{5}+k\dfrac{2\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4.

Giải phương trình: $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\sin 3x - \sin x\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + 2\sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos x + \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos x + 1\right)\left(2\cos x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 5.

Giải phương trình: $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(\cos 10x - \cos 6x\right) + \left(1 - \cos 8x\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin 8x \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 4x \sin 2x\left(\cos 4x - \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 4x \sin 2x \sin 3x \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 6.

Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$\left(1 - \cos 2x\right) + \left(\cos 3x - \cos x\right) + \left(\sin x - \sin 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin 2x \sin x + \sin x\left(1 - 2\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin x - 2\sin 2x + 1 - 2\cos x\right) = 0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)(1-2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 7.

Giải phương trình: $(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)=3-4\cos^2 x$.

<u>Lời giải:</u>

$$(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)=3-4(1-\sin^2 x)=4\sin^2 x-1$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(2\sin 2x+1)=(2\sin x-1)(2\sin x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin 2x-\sin x)=0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

Bài 8.

Giải phương trình: $(\cos x-\sin x)\cos x\sin x=\cos x\cos 2x$.

<u>Lời giải:</u>

Phương trình tương đương với:

$$(\cos x-\sin x)\cos x\sin x=\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-\sin x)(\sin x-(\cos x+\sin x))=0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 x(\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 9.

Giải phương trình: $(2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4\cos^2 x=3$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+4(1-\sin^2 x)-3=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(3\cos 4x+2\sin x-4)+(1+2\sin x)(1-2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (1+2\sin x)(3\cos 4x-3)=0$.

Bài 10.

Giải phương trình: $\cos^2 x+\sin^3 x+\cos x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$(\cos^2 x+\cos x)+\sin^3 x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x+1)+\sin x(1-\cos^2 x)=0$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(\cos x+\sin x-\sin x\cos x)=0$.

Bài 11. Giải phương trình

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(2\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Bài 12. Giải phương trình

$\cos 2x-3\sin 2x+5\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{9\pi}{4}\right)=3$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\cos 2x-3\sin 2x+5\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{9\pi}{4}\right)=3\Leftrightarrow \cos 2x-3\left(1+\sin 2x\right)+5\left(\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\cos x-\sin x\right)-3\left(\sin x+\cos x\right)^2+5\left(\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(5-3\left(\sin x+\cos x\right)+\left(\cos x-\sin x\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(4\sin x+2\cos x-5\right)=0\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Bài 13. Giải phương trình

$$\frac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Lời giải:

Điều kiện $\cos x\neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với

$$\cos^2 x\left(\tan^2 x+\tan x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos x\sin x=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.\text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Bài 14. Giải phương trình

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$\left(\sin 3x+\sin x\right)+\sin 2x=\left(1+\cos 2x\right)+\cos x\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=\cos x\left(2\cos x+1\right)\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos x+1\right)\left(2\sin x-1\right)=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 15. Giải phương trình

$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8.$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$$
$$\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x(1 - \sin x) - 2\sin^2 x - 7 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\cos x(1 - \sin x) + (1 - \sin x)(2\sin x - 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Bài 16.

Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1)$$
$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = \cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 17.

Giải phương trình: $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$2\sin^3 x-\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(1+\sin x\right)-\left(1-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x\right)-\left(1-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(2\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(1+2\sin x\cos x+2\left(\sin x+\cos x\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(\left(\sin x+\cos x\right)^2+2\left(\sin x+\cos x\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\cos x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 18.

Giải phương trình: $2\cos^3 x+\cos 2x+\sin x=0$.

Lời giải:

Phương trình tương đương với:

$$2\cos^3 x+2\cos^2 x-1+\sin x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(1+\cos x\right)-\left(1-\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)-\left(1-\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(2\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(1+2\sin x\cos x+2\sin x+2\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x+\cos x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\sin x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Bài 19.

Giải phương trình: $\sin 3x=\cos x\cos 2x\left(\tan^2 x+\tan 2x\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $\cos x.\cos 2x \neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với: $\cos x.\sin 3x = \cos 2x\sin^2 x + \cos^2 x\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) = \sin x\left(2\cos^2 x.\cos x + \cos 2x\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = \sin x\left(\cos 2x\sin x + 2\cos^3 x\right)$

❖ Xét $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, thỏa mãn điều kiện.

❖ Xét $\cos x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = \cos 2x\sin x + 2\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \cos x\left(3 - 4\sin^2 x - 2\cos^2 x\right) = \cos 2x\sin x \Leftrightarrow \cos x\cos 2x = \cos 2x\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x - \cos x\right) = 0$, đối chiếu với điều kiện thì phương trình này tương đương với: $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 20. Giải phương trình: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$.

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0$.

Khi đó phương trình tương đương với:

$2\left(\sin 3x - \cos 3x\right) = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x} \Leftrightarrow 2\left(3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x\right) = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin x}$

$\Leftrightarrow 2\left(3\left(\sin x + \cos x\right) - 4\left(\sin x + \cos x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x\right)\right) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x}$

❖ Xét $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

❖ Xét $2\left(3 - 4\left(1 - \sin x\cos x\right)\right) = \dfrac{1}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x\left(4\sin x\cos x - 1\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\sin 2x - 1\right) = 1 \Rightarrow 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sin 2x - 1\right)\left(2\sin 2x + 1\right) = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \frac{-\pi}{12} + k\pi\\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\left\{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Bài 21. Giải phương trình:

$$\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0$

Khi đó phương trình tương đương với

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x - 1) = 2(\sin x + \cos x)(1 + \sin x)$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)^2 (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \pi + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện.

Bài 22. Giải phương trình:

$$3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \neq k\pi$

Khi đó phương trình tương đương với:

$\frac{3\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos x + 2\sqrt{2}\sin^4 x - 3\sqrt{2}\cos x\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x\right)\left(3\cos x - 2\sin^2 x\right) = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\cos x - 2\sin^2 x = 0 \\ \cos x - \sqrt{2}\sin^2 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$ thỏa mãn điều kiện.

Bài 23. Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x + \sin 2x\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) - 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2\sqrt{2}(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x(\sin x + \cos x) - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\big(4(\cos x - \sin x) - \sin 2x - 4\big) = 0$$

Ta có $4(\cos x - \sin x) - \sin 2x - 4 = 4(\cos x - \sin x) - 2\sin x\cos x - 5 + \sin^2 x + \cos^2 x$

$$= (\cos x - \sin x)^2 + 4(\cos x - \sin x) - 5 = (\cos x - \sin x - 1)(\cos x - \sin x + 5)$$

Vậy phương trình tương đương với

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1)(\cos x - \sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Bài 24. Giải phương trình $2\sin^2 x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\sin 2x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Phương trình tương đương với

$$2\sin^2 x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}.2\sin 2x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\sin 2x(1-\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x(\sin x+\cos x)=2\sqrt{2}\sin^2 x\sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x-\sqrt{2}\sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{k\pi;\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình sau:

Bài 1. Giải phương trình : $\cos^3 x+\sin^3 x=\sin x-\cos x$.

Bài 2. Giải phương trình: $\cos^3 x+\sin^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$.

Bài 3. Giải phương trình: $\cos^3 x+\cos^2 x+2\sin x-2=0$.

Bài 4. Giải phương trình: $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$.

Bài 5. Giải phương trình: $\cos^2 x-4\sin x\cos x=0$.

Bài 6. Giải phương trình: $2\sin^3 x-\sin x=2\cos^3 x-\cos x+\cos 2x$.

Bài 7. Giải phương trình: $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$.

Bài 8. Giải phương trình: $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Giải phương trình: $\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=\sin 2x$.

Bài 10. Giải phương trình: $(\sin x+3)\sin^4\frac{x}{2}-(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}+1=0$.

Bài 11. Giải phương trình: $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

Bài 12. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$.

Bài 13. Giải phương trình: $5\sin 3x-3\sin 5x=0$.

Bài 14. Giải phương trình: $2\cos 2x-8\cos x+7=\frac{1}{\cos x}$.

Bài 15. Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x(1+\cot x)-3}{\sin x-\cos x}=3\cos x$.

Bài 16. Giải phương trình: $1+\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Bài 17. Giải phương trình: $\sin^3 x(1-\cot x)+\cos^3 x(1-\tan x)=\frac{3}{2}\cos 2x$.

Bài 18. Giải phương trình: $\frac{5\sin x-5\tan x}{\sin x+\tan x}+4(1-\cos x)=0$.

Bài 19. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right)=\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}$.

Bài 20. Giải phương trình :

$$2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x.$$

Bài 21. Giải phương trình:

$$\cos 2x+3\sin 2x+5\sin x-3\cos x=3.$$

Bài 22. Giải phương trình:

$$\frac{4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)}{2\sin^2 x-1}=0.$$

Bài 23. Giải phương trình: $\cos^4 x-\cos 2x+2\sin^6 x=0$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 24. Giải phương trình: $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$.

Bài 25. Giải phương trình: $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$.

Bài 26. Giải phương trình: $2\sin^3 x+\cos 2x=\sin x$.

Bài 27. Giải phương trình: $4\sin 2x-3\cos 2x=3(4\sin x-1)$.

Bài 28. Giải phương trình: $\sin 4x-\cos 4x=1-4(\sin x-\cos x)$

Bài 29. Giải phương trình:

$$\sin 2x(\cos x+3)-2\sqrt{3}\cos^3 x-3\sqrt{3}\cos 2x+8\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)-3\sqrt{3}=0$$

BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

Bài 1. Giải phương trình:

$$4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos 2x.$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$4\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+4\sqrt{3}\cos x\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=2.$$

Bài 3. Giải phương trình: $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x=\frac{3}{2}-4\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)$

Bài 4. Giải phương trình: $(2\sin 5x-1)(2\cos 2x-1)=2\sin x$

ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ CÙNG MỘT CUNG LƯỢNG GIÁC

Đặt $t=ax+b$, với $|a|$ nhỏ nhất, mục đích là biến đổi các biểu thức thành các cung lượng giác $t,2t,3t,...$. Sau đó dùng công thức hạ bậc để giải phương trình với ẩn là t.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình

$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$.

Lời giải:

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\pi-3t$, khi đó phương trình trở thành

$$\sin t=\frac{1}{2}\sin(\pi-3t)\Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t$$

$$\Leftrightarrow\sin t\left(1-4\sin^2 t\right)=0\Leftrightarrow\sin t\left(2\cos 2t-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi\\ x=\frac{14\pi}{5}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{4\pi}{5}+k2\pi\end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình

$\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải:

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=3t-\pi;2x=2t-\frac{\pi}{2}$, khi đó phương trình trở thành

$$\sin(3t-\pi)=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t\Leftrightarrow\sin 3t=\sin t\cos 2t\Leftrightarrow 3\sin t-4\sin^3 t=\sin t\cos 2t$$

$$\Leftrightarrow\sin t\left(3-4\sin^2 t-\cos 2t\right)=0\Leftrightarrow\sin t\left(1+\cos 2t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=-1\end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ 2t = (2k+1)\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Bài 3. Giải phương trình

$$8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x.$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = 3t - \pi$, khi đó phương trình trở thành

$$8\cos^3 t = \cos(3t - \pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -\cos 3t \Leftrightarrow 8\cos^3 t = 3\cos t - 4\cos^3 t$$

$$\Leftrightarrow 3\cos t\left(4\cos^2 t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(2\cos 2t + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \cos 2t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = k\pi \end{array}\right.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Giải phương trình

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 5\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 3x.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$32\cos^6\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 6x = 1.$$

Bài 3. Giải phương trình

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 3x - \cos 3x.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 4. Giải phương trình

$$2\cos\frac{6x}{5}+1=3\cos\frac{8x}{5}.$$

Bài 5. Giải phương trình

$$\cos 9x+2\cos\left(6x+\frac{2\pi}{3}\right)+2=0$$

NHÂN HAI VẾ CỦA PHƯƠNG TRÌNH VỚI MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Giải phương trình: $\sin\frac{5x}{2}=5\cos^3 x\sin\frac{x}{2}$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $\cos\frac{x}{2}=0$, không là nghiệm của phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, ta được:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=10\cos^3 x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\Leftrightarrow \sin 3x+\sin 2x=5\cos^3 x\sin x$$

$$\Leftrightarrow\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)+2\sin x\cos x=5\cos^3 x\sin x$$

$$\Leftrightarrow\sin x\left(5\cos^3 x-2\cos x-3+4\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sin x\left(\cos x-1\right)\left(5\cos^2 x+\cos x-1\right)=0$$

- ❖ Xét $\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow x=k2\pi$, do $\cos\frac{x}{2}\neq 0$.
- ❖ Xét $\cos x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- ❖ Xét $5\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{-1-\sqrt{21}}{5}=\cos\alpha\\ \cos x=\frac{-1+\sqrt{21}}{5}=\cos\beta\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\alpha+k2\pi\\ x=\pm\beta+k2\pi\end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2. Giải phương trình: $2\sin 3x\left(1-4\sin^2 x\right)=1$.

Lời giải:

nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình:

nhân hai vế của phương trình với $\cos x\neq 0$, ta được

$$2\sin 3x\left(1-4\left(1-cos^2 x\right)\right)\cos x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x=\cos x \Leftrightarrow \sin 6x=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7} \\ x=\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.$$

PHƯƠNG TRÌNH DẠNG PHÂN THỨC

Sau khi biến đổi phương trình có dạng:

$$\frac{F\left(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x\right)}{G\left(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x\right)}=0$$

Lưu ý: *Khi giải phương trình dạng này ta phải xét điều kiện mẫu thức khác 0, nên khi giải xong phải đối chiếu lại xem ngiệm có thỏa mãn điều kiện không.*

Ta nên để điều kiện có nghiệm của phương trình dưới dạng thô.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\sin 4x=4\sin x\cos x\cos 2x\neq 0$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{2}{4\sin x\cos x\cos 2x}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos 2x - \sin x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin^2 x + \sin x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), thì chỉ có nghiệm $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Bài 2.

Giải phương trình: $\frac{2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x}{\left(\sin x - \cos x\right)\sin 2x} = 0$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\left(\sin x - \cos x\right)\sin 2x \ne 0$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos 2x - 1\right) = 0$

Xét $\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$ loại, do không thỏa mãn điều kiện (*).

Xét $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sin x\right) = 0$, đối chiếu với điều kiện (*) ta suy ra chỉ có:

$\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 3.

Giải phương trình: $\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\sin 2x \ne 1$ (*).

Khi đó phương trình tương đương với:

$1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = \sin 2x - 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\sqrt{2}\right)\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) chỉ có nghiệm $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$ là nghiệm của phương trình.

Bài 4.

Giải phương trình: $\frac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x\neq 0 \\ 1+\cos 4x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x\neq 0 \\ \cos 2x\neq 0 \end{cases}$

Khi đó phương trình tương đương với:

$1-\cos^2 4x=2\sin 2x\sin 4x \Leftrightarrow \sin^2 4x=2\sin 2x\sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\sin 4x\left(\cos 2x-1\right)=0$, đối chiếu với điều kiện thì phương trình này vô nghiệm.

Bài 5.

Giải phương trình: $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$.

lời giải:

Phương trình tương đương với: $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x\left(1+2\cos x\right)}{\cos 2x\left(1+\cos 2x\right)}=\sqrt{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\cos x\neq 0 \\ \tan 2x=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\neq -\frac{1}{2} \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+m\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+2m\pi \end{array}\right., m\in\mathbb{Z}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các phương trình sau:

Bài 1. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x+2\cos^2 x-1}{\cos x-\cos 3x+\sin 3x-\sin x}=\cos x$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 2. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^2 x(1+\cot x)-3}{\sin x-\cos x}=3\cos x$.

Bài 3. Giải phương trình: $\dfrac{2(\cos^3 x+2\sin^3 x)}{2\sin x+3\cos x}=\sin 2x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\dfrac{1}{\tan x+\cot 2x}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot x-1}$.

Bài 5. Giải phương trình: $\dfrac{\cot^2 x-\tan^2 x}{\cos 2x}=16(1+\cos 4x)$.

Bài 6. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$.

Bài 7. Giải phương trình: $\dfrac{3(\cos 2x+\cot 2x)}{\cot 2x-\cos 2x}-2\sin 2x=2$.

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}=\dfrac{7}{8}$.

Bài 9. Giải phương trình: $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$.

Bài 10. Giải phương trình: $1+\cot 2x=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

Bài 11. Giải phương trình: $\tan 3x\cot x=-1$.

Bài 12. Giải phương trình: $\dfrac{\sin x\cot 5x}{\cos 9x}=1$.

Bài 13. Giải phương trình: $\dfrac{\cos x-2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+\sin x-1}=\sqrt{3}$.

Bài 14. Giải phương trình: $\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin 2x}=\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$.

Bài 15. Giải phương trình: $\dfrac{4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos 2x}{\sin x-\cos x}=0$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 1. Tìm $x \in [2;+\infty)$ thỏa mãn phương trình

$$\sin\frac{2(2x+1)}{x-1}+\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x+1}{x-1}-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Bài 2. Tìm các nghiệm $x \in \left[\frac{1}{10};+\infty\right)$ $\sin\frac{2x+1}{x}+\sin\frac{2x+1}{3x}-\cos^2\frac{2x+1}{3x}=0$

Bài 3. Giải phương trình:

$$2011\tan x+\cot x=2\left(1005\sqrt{3}+\frac{1}{\sin 2x}\right)$$

Bài 4. Giải phương trình:

$$2(1+\cos x)\left(\cot^2 x+1\right)=\frac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}$$

Bài 5. Giải phương trình:

$$\sin 3x+\cos 3x-2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

Bài 6. Giải phương trình:

$$16\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}-2\sin 4x$$

Bài 7. Giải phương trình:

$$\frac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x$$

Bài 8. Giải phương trình:

$$4\cos^4 x-\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x+\cos\frac{3x}{4}=\frac{7}{2}$$

Bài 9. Giải phương trình:

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x$$

Bài 10. Giải phương trình:

$$2\sin^5 x+2\sin^3 x\cos^2 x+\cos 2x-\sin x=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 11. Giải phương trình:

$$(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x)=\frac{1}{2}$$

Bài 12. Giải phương trình:

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\cos 2x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Bài 13. Giải phương trình:

$$2\cos x\cos 2x\cos 3x+5=7\cos 2x$$

Bài 14. Giải phương trình:

$$\tan^2 x-\tan^2 x\sin^3 x-\left(1-\cos^3 x\right)=0$$

Bài 15. Giải phương trình:

$$2\cos x+\frac{1}{3}\cos^2(x+\pi)=\frac{8}{3}+\sin 2x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin^2 x$$

Bài 16. Giải phương trình:

$$\left(1-\sin^3 x\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}-2\right)=0$$

Bài 17. Giải phương trình:

$$\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}(\sin x+1)$$

Bài 18. Giải phương trình:

$$\frac{\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{8}$$

Bài 19. Giải phương trình:

$$\cos 3x\sin 2x-\cos 4x\sin 2x=\frac{1}{2}\sin 3x+\sqrt{1+\cos x}$$

Bài 20. Giải phương trình:

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 21. Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x-\cot x)=\tan^2 x+\cot^2 x-2$

Bài 22. Giải phương trình:

$$\sqrt{\sin x}+\sin x+\sin^2 x+\cos x=1$$

Bài 23. Giải phương trình: $\cos x+\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)-4\cos 2x\cos x-2\cos^2 x+2=0$

Bài 24. Giải phương trình:

$$\cos^2 2x+\cos 4x(\tan 2x\cot x-1)=-\frac{3}{4}$$

Bài 25. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{3}-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin 4x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=6\sin^2 x-2\cos^2 x$$

Bài 26. Giải phương trình:

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+8\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=2$$

Bài 27. Giải phương trình:

$$1+\frac{1}{2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Bài 28. Giải phương trình:

$$\frac{\frac{1}{2}+(1-\sin x)(1-\cos x)+2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{7}{6}\sin 2x}{\tan x+1}=\frac{3}{2}\cos 2x$$

Bài 29. Giải phương trình:

$$2\sqrt{2}(1-\cos x\cos 2x)=\frac{\cos 4x}{2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)-1}$$

Bài 30. Giải phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.1. $\sin 9x+\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin 8x-\cos 8x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.2. $\sin 9x+\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin 8x-\cos 8x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)=0$

Bài 31. Giải phương trình:

1.1. $\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1.2. $\frac{\sqrt{3}\sin 2x\left(1+2\cos x\right)+\cos 3x}{1+2\cos x+\cos 2x}=1$

1.3. $\sqrt{3}\left(\sin 2x-3\sin x\right)=2\cos^2 x+3\cos x-5$

1.4. $\frac{2\cos^2 x+2\cos x-3}{\sin^2\frac{x}{2}}+4\sqrt{3}\sin x=0$

1.5. $\left(2-\frac{1}{\sin x}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=4\sin x-\frac{1}{2\sin x}-1$

1.6. $\frac{2-\sin^2 x}{\cos 2x+4\cos x+3}=\frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2}$

1.7. $2\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right)-\cos x\right)=2\sin 2x-3$

1.8. $\frac{\sqrt{2}\left(\sin x-\cos x\right)^2\left(1+2\sin 2x\right)}{\sin 3x+\sin 5x}=1-\tan x$

1.9. $2\left(\sin x+1\right)\left(\sin^2 2x-3\sin x+1\right)=\sin 4x\cos x$

1.10. $\frac{\left(1+\cos 2x\right)\sin 2x}{1-\sin x}=2\left(\sin 3x+\sin x\right)\left(1+\sin x\right)$

1.11. $\frac{2\sin x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-2\cos 3x-\sqrt{3}}{2\sin x-1}=0$

1.12. $3\cot x-\tan x\left(3-8\cos^2 x\right)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.13. $\dfrac{\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x-\dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}}{2\sin 4x-\sqrt{2}}=0$

1.14. $\dfrac{3\left(\cos 2x+\cot 3x\right)}{\cot 3x-\cos 2x}=4\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

1.15. $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\sin 2x}=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$

1.16. $9+\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}+1\right)\cos 2x+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\sin 2x=4\sqrt{2}\left(\cos x+\sqrt{2}\sin x\right)$

1.17. $\left(\dfrac{\sin x}{\cos 3x}+\dfrac{\sin 3x}{\cos 9x}+\dfrac{\sin 9x}{\cos 27x}\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0$

1.18. $\dfrac{1+\cot 2x\cot x}{\cos^2 x}+1=6\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$

1.19. $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=1+\dfrac{1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$

1.20. $\tan^2\dfrac{x}{2}\tan x=4\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x+\tan x$

1.21. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}+8\sin^2\left(2x+\dfrac{11\pi}{2}\right)=4\left(\cos 2x+1\right)$

1.22. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=3\left(1-\dfrac{1}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}\right)$

1.23. $2\sqrt{2}\cos 2x+\sin 2x\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)-4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

1.24. $\sin^2 x\left(\tan x-2\right)=3\left(\cos 2x+\sin x\cos x\right)$

1.25. $\sqrt{2}\left(\sin 2x-1\right)=\dfrac{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 2x}{3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}$

1.26. $\dfrac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+\cos x-1}=\tan^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.27. $2\sin^2 x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$

1.28. $8\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)-\sin 4x$

1.29. $2(\sin 3x+\cos 3x-\sin 2x)=-1+2\sqrt{2}$

1.30. $5\sin x-\sqrt{2\cos 3x-1}=5\cos 3x-\sqrt{2\sin x-1}$

1.31. $(1+\tan x)\cos 5x=\sin x+\cos x+2\cos 4x-2\cos 2x$

1.32. $(2\sin^2 x-1)\cot^2\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]+3(2\cos^2 x-1)=0$

1.33. $\frac{(1+2\cos x.\cos 3x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sin 2x}=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

1.34. $\frac{\tan 2x}{\tan 3x}=\frac{2}{1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}$

1.35. $\cot\frac{x}{2}-\frac{1+\cos 3x}{\sin 2x-\sin x}=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

1.36. $\sqrt{2(1-\sin 2x)}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos 2x=0$

1.37. $\frac{4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)+1}{2\sin x}=2\cos 2x+2\cos x+1$

1.38. $\frac{(\cos x+\sin x)(2\sin 2x+1)+4\cos 2x}{(\cos x-\sin x)(2\sin 2x+1)+2}=\sqrt{3}$

1.39. $3\tan^3 x-3\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\tan^2 x}=8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

1.40. $\frac{\tan x\cos 3x+2\cos 2x-1}{1-2\sin x}=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.41. $$\frac{4(1-\sin x\cos x)+\cos 3x+4\sin x-\cos x}{\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)+1}=8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin^2 x$$

1.42. $$\frac{1+\sin x-\cos^2 x}{\sin^2 x}.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\tan x+2\sqrt{3}$$

1.43. $$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos x}+\tan^2 x=2\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)$$

1.44. $$2\sin x\left(2\sin x-\sin^2 3x\right)=\sin^2 3x\left(2\sin x-1\right)$$

1.45. $$\left[4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1\right]\sin 2x=2\left(\sin 7x-\sin 3x\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam